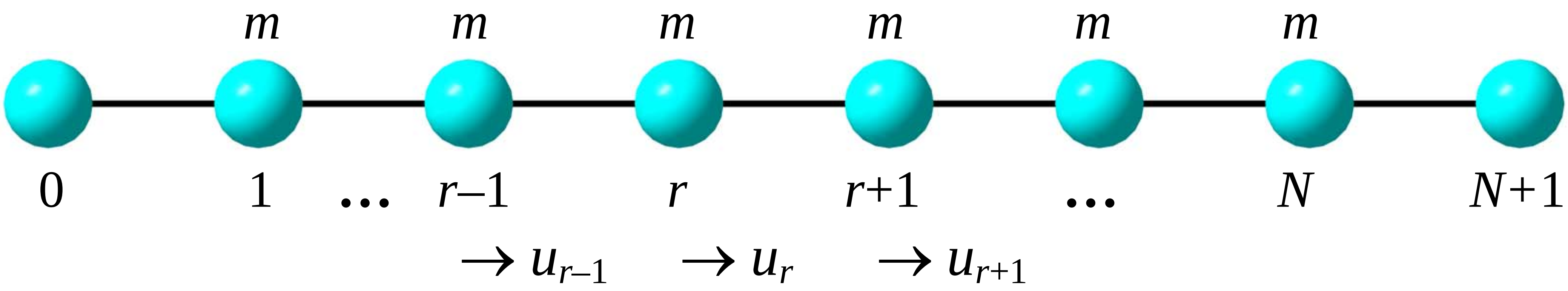
Воспоминание о семинаре: колебания *конечной* одноатомной цепочки с граничными условиями



Уравнение Ньютона для *r*-го атома:

$$m\left(d^2u_r/dt^2\right) = f\left(u_{r-1} - 2u_r + u_{r+1}\right), \quad r = 1, 2 \dots, N$$

На концах цепочки требуется наложить **два** граничных условия:

- либо: $u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0$ – *граничные условия Дирихле;*
- либо: $u_0 = u_N, \; u_1 = u_{N+1}$ – *периодические граничные условия*

Замечание: Периодические граничные условия в задаче о колебаниях решеток были введены **Борном** и **фон Карманом** (*M. Born, Th. von Kármán*, 1912)

Почему граничных условий именно *два*?

Выпишем уравнения Ньютона для 1-го и для N-го атома:

$$m\left(d^2u_1/dt^2\right) = f\left(u_0 - 2u_1 + u_2\right)$$
$$m\left(d^2u_N/dt^2\right) = f\left(u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1}\right)$$

Чтобы получить замкнутую систему N уравнений, необходимо исключить из нее смещения 0-го и $N+1$-го атомов $\Leftrightarrow$ наложить *две связи:*

- $u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0$ – *граничные условия Дирихле:*

$$m\left(d^2u_1/dt^2\right) = f\left(-2u_1 + u_2\right)$$
$$m\left(d^2u_N/dt^2\right) = f\left(u_{N-1} - 2u_N\right)$$

- $u_0 = u_N, \; u_1 = u_{N+1}$ – *периодические граничные условия:*

$$m\left(d^2u_1/dt^2\right) = f\left(-2u_1 + u_2 + u_N\right)$$
$$m\left(d^2u_N/dt^2\right) = f\left(u_1 + u_{N-1} - 2u_N\right)$$

Наглядное представление – посредством матричной записи:

$$\mathbb{M}\,\ddot{\mathbf{u}} = \mathbb{U}\,\mathbf{u}$$

$\mathbb{M}$ – диагональная матрица масс, $\mathbb{U}$ – матрица силовых постоянных,
$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_N \end{pmatrix}^T$ – вектор смещений.

- $u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0$ – *граничные условия Дирихле:*

$$\begin{bmatrix} m\ddot{u}_1 \\ m\ddot{u}_2 \\ m\ddot{u}_3 \\ m\ddot{u}_4 \\ m\ddot{u}_5 \\ m\ddot{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2f & f & & & & \\ f & -2f & f & & & \\ & f & -2f & f & & \\ & & f & -2f & f & \\ & & & f & -2f & f \\ & & & & f & -2f \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ здесь $\mathbb{U}$ – *трёхдиагональная матрица*

- *периодические граничные условия:*

$$u_0 = u_N$$

$$\begin{bmatrix} m\ddot{u}_1 \\ m\ddot{u}_2 \\ m\ddot{u}_3 \\ m\ddot{u}_4 \\ m\ddot{u}_5 \\ m\ddot{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} f \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -2f & f & & & & f \\ f & -2f & f & & & \\ & f & -2f & f & & \\ & & f & -2f & f & \\ & & & f & -2f & f \\ f & & & & f & -2f \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ f \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = u_{N+1}$$

$\Rightarrow$ здесь $\mathbb{U}$ – *циркулянтная матрица*

Нормальные колебания: $\mathbf{u} = \boldsymbol{l}\,\exp(\pm i\omega t)$

$\boldsymbol{l}$ – векторы форм нормальных колебаний: $\boldsymbol{l} = |\boldsymbol{l}|\exp(i\varphi)$
(*аналогия со стационарными состояниями в квантовой механике*!)

$$\mathrm{M}\,\ddot{\mathbf{u}} = \mathrm{U}\,\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{U}\,\boldsymbol{l} = -\omega^2 \mathrm{M}\,\boldsymbol{l}$$

– *обобщенная* задача на собственные векторы (*сводится к обычной*).
$\Rightarrow \quad (\omega_1 \quad \ldots \quad \omega_N); \quad (\boldsymbol{l}_1 \quad \ldots \quad \boldsymbol{l}_N)$ – дискретный набор решений!

Ищем $\boldsymbol{l}_s = \begin{pmatrix} l_{1s} & \ldots & l_{Ns} \end{pmatrix}^T$ в виде суперпозиции бегущих волн:

$$l_{rs} = A_s \exp(ik_s rL) + B_s \exp(-ik_s rL)$$

$\Rightarrow$ *из граничных условий* находим: $A_s; \quad B_s; \quad k_s$

$\Rightarrow$ *из уравнений Ньютона – закон дисперсии частоты*:

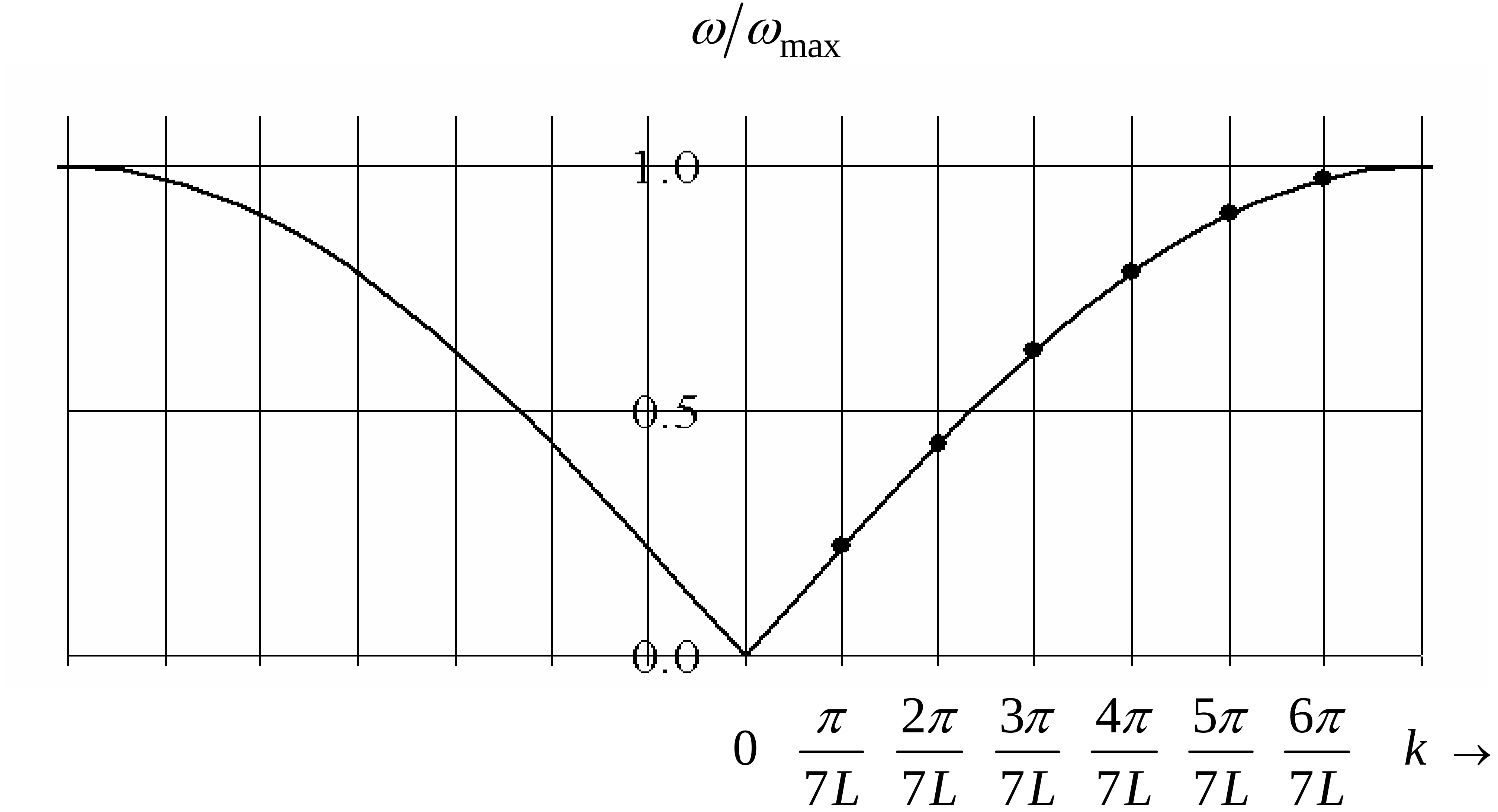
$$\omega_s = \omega(k_s) = \omega_{\max}\left|\sin(k_s L/2)\right|, \quad s = 1, \ldots, N, \quad \omega_{\max} = 2\sqrt{f/m}$$

$\Rightarrow$ *дискретный спектр частот*.

- *граничные условия Дирихле:*

$$A_s = -B_s; \quad k_s = \pi s/(N+1)L; \quad s = 1,\ldots,N$$

(*стоячие волны*)



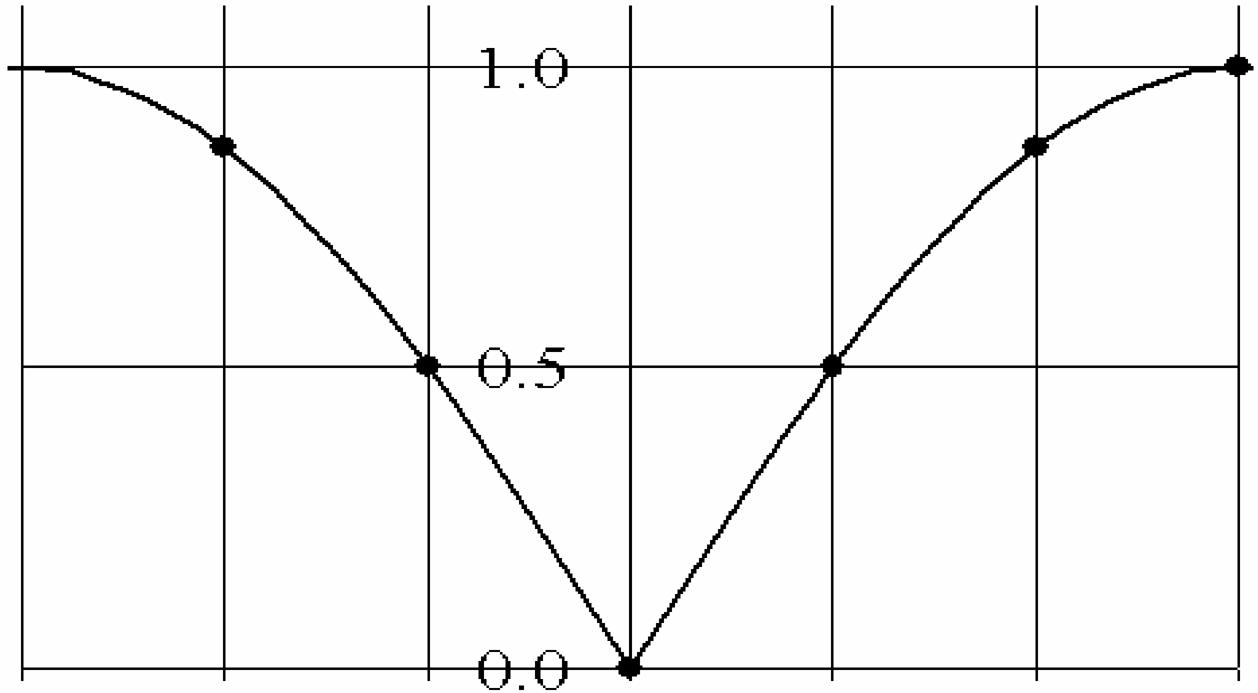
- *периодические граничные условия:*

$$k_s = 2\pi s / NL;$$

$$s = 0, \pm 1, \ldots, \pm\left(N-1\right)/2 \quad (N = 2p+1)$$

$$s = 0, \ \pm 1, \ldots, \pm\left(N/2-1\right), N/2 \quad (N = 2p)$$

$\omega/\omega_{\max}$



$$-\frac{6\pi}{6L} \quad -\frac{4\pi}{6L} \quad -\frac{2\pi}{6L} \quad 0 \quad \frac{2\pi}{6L} \quad \frac{4\pi}{6L} \quad \frac{6\pi}{6L} \quad k \rightarrow$$

- *периодические граничные условия*

Поскольку $\omega(k)=\omega(-k)$, то имеются *дважды вырожденные частоты*

$\Rightarrow$ *в этом случае формы колебаний определены неоднозначно*.

Например, можно выбрать два комплексных решения вида:

$$l_{rs}^{(+)} = A_s \exp(ik_s rL); \quad l_{rs}^{(-)} = B_s \exp(-ik_s rL); \quad \forall A_s; \ \forall B_s$$

(«бегущие волны»)

А можно выбрать два вещественных:

$$l_{rs}^{(C)} = a_s \cos(k_s rL); \quad l_{rs}^{(S)} = b_s \sin(k_s rL); \quad \forall a_s; \ \forall b_s$$

(«стоячие волны»)

Исключения: $k_s = 0; \quad k_s = N/2 \quad (N = 2p)$ – частоты не вырождены, решения строятся однозначно и вещественны (стоячие волны).

Общее решение задачи – суперпозиция нормальных колебаний:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{s=1}^{N} \left[C_s \exp(i\omega_s t) + C_s^* \exp(-i\omega_s t) \right] \boldsymbol{l}_s = \sum_{s=1}^{N} 2a_s \cos(\omega_s t + \alpha_s) \boldsymbol{l}_s$$

Здесь $C_s = |C_s| \exp(i\alpha_s)$ – совокупность N комплексных ($\Leftrightarrow 2N$ вещественных) свободных параметров, которые определяются $2N$ начальными условиями: $u_1(0),\ \ldots,\ u_N(0);\quad \dot{u}_1(0),\ \ldots,\ \dot{u}_N(0)$