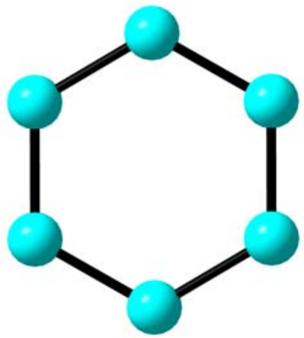
Неприводимые представления циклической группы

$$\mathbb{C}_N = \left\{ \hat{E}, \quad \hat{C}_N, \quad \hat{C}_N^2, \quad \ldots, \quad \hat{C}_N^{N-1} \right\}, \qquad \hat{C}_N^N = \hat{E}$$

Как известно, она может быть реализована как группа плоских поворотов правильного N-угольника:



- Циклическая группа – коммутативная (абелева):

$$\hat{C}_N^m \, \hat{C}_N^n = \hat{C}_N^{m+n} = \hat{C}_N^n \, \hat{C}_N^m$$

- Конечная абелева группа порядка N имеет ровно N одномерных ($\Rightarrow$ неприводимых) представлений.

- $\Rightarrow$ все неприводимые представления группы $\mathbb{C}_N$ одномерны:

$$\mathbb{C}_N = \left\{ \hat{E}, \quad \hat{C}_N, \quad \hat{C}_N^2, \quad \ldots, \quad \hat{C}_N^{N-1} \right\} \quad \leftrightarrow \quad \Gamma_\gamma = \left\{ 1, \quad \gamma, \quad \gamma^2, \quad \ldots, \quad \gamma^{N-1} \right\}$$

где $\gamma \in \mathbb{C}$. Выясним, каким может быть γ:

$$\hat{C}_N^N = \hat{E} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^N = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \gamma_m = \exp\left(-\frac{2\pi i\, m}{N} \right),$$

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm (N-1)/2 \quad (N = 2p+1)$$

$$m = 0, \ \pm 1, \ldots, \pm (N/2-1), N/2 \quad (N = 2p)$$

- Отметим, что это – в точности те самые числа, которые были получены нами в прошлый раз как характеры представлений группы трансляций бесконечной цепочки с периодическим граничным условием:

$$u(x_r - NL, t) = u(x_r, t)$$

$$\xi_k(x_r) = A\exp(ikx_r), \quad k = k_m = \frac{2\pi m}{NL}$$ – формы нормальных мод;

$$\hat{T}_{nL}\ \xi_{k_m}(x_r) = \exp(-ik_m nL)\,\xi_k(x_r) = \exp\left(-\frac{2\pi i\, mn}{N}\right)\xi_{k_m}(x_r)$$

$$\hat{T}_{nL} \quad \mapsto \chi_m(n) = \exp\left(-\frac{2\pi i\, mn}{N}\right)$$

– одномерное представление группы трансляций бесконечной цепочки. Как таковое, оно было *не точным* (*не изоморфным*), поскольку:

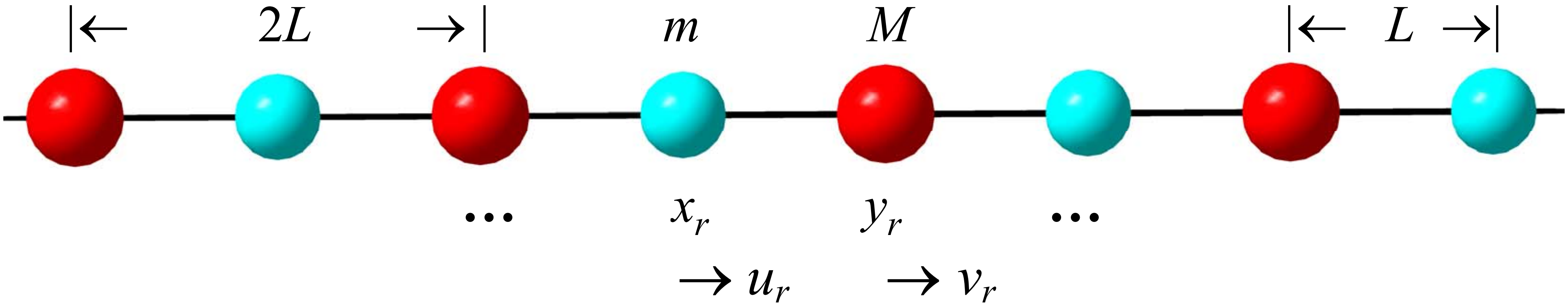
$$\hat{T}_{NL} \neq \hat{E} \quad \mapsto \chi_m(N) = \exp\left(-\frac{2\pi i\, mN}{N}\right) = 1$$

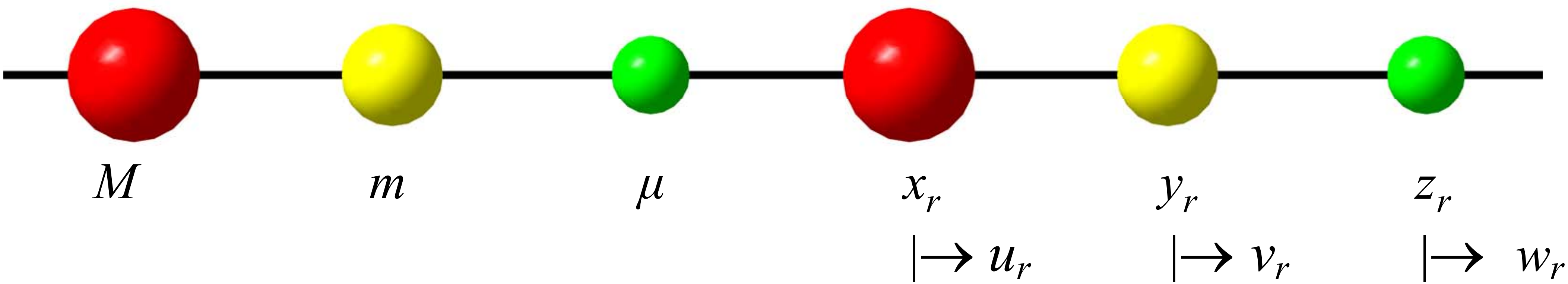
Но для группы $\mathbb{C}_N$ это – *точное представление* $\Rightarrow$

• *группа $\mathbb{C}_N$ изоморфна фактической группе симметрии задачи о колебаниях бесконечной цепочки с периодическим граничным условием*

(Это есть ***динамическая симметрия*** данной физической задачи)

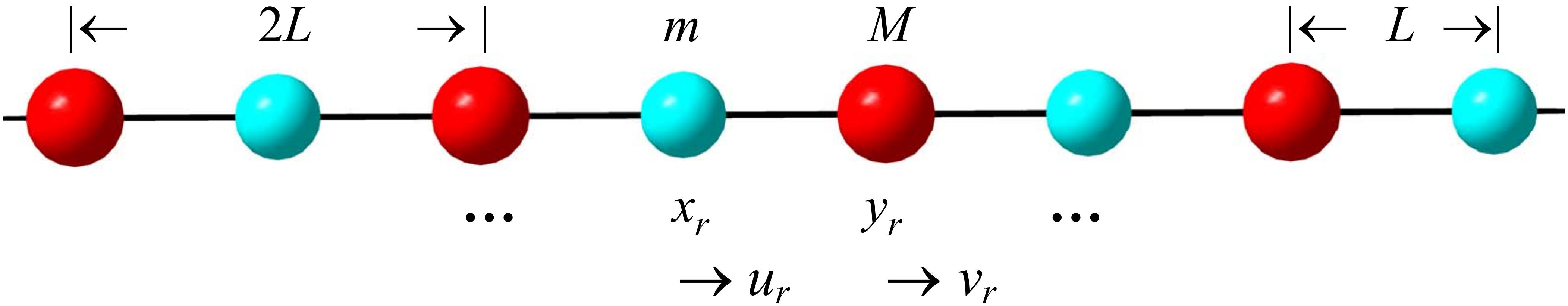
Вопрос: какова будет динамическая симметрия в задаче о колебаниях двухатомной, трехатомной и т.д. цепочки с тем же периодическим условием $u\left(x_r - NL, t\right) = u\left(x_r, t\right)$?

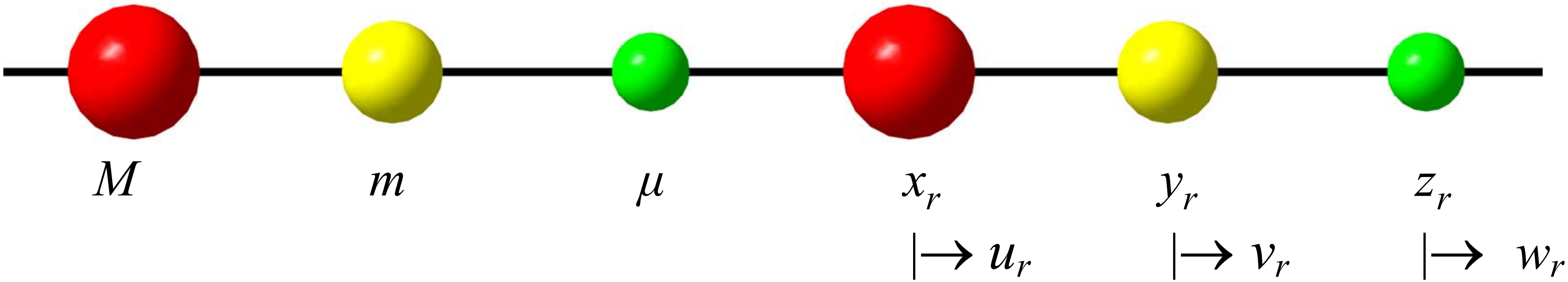




Вопрос: какова будет динамическая симметрия в задаче о колебаниях двухатомной, трехатомной и т.д. цепочки с тем же периодическим условием $u(x_r - NL, t) = u(x_r, t)$?

Ответ: та же, что и у одноатомной цепочки – группа $\mathbb{C}_N$





Построение симметризованных смещений атомов с использованием аппарата теории групп

Пусть дана конечная группа $G = \{g_1, \quad \ldots, \quad g_N\}$ порядка N и ее неприводимое представление Γ размерности $\dim \Gamma$ с характерами $\chi_\Gamma(g)$.

Оператор:

$$\hat{P}_\Gamma = \frac{\dim \Gamma}{N} \sum_{g \in G} \chi_\Gamma^*(g)\, \hat{T}_g$$

является *проектором* на неприводимое представление Γ.

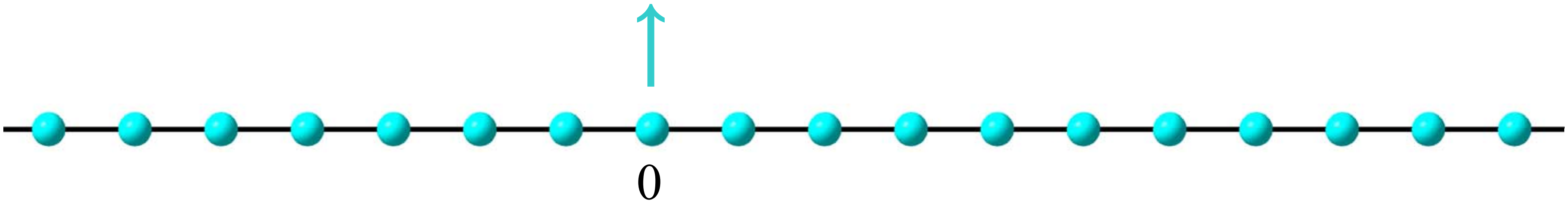
Чтобы пояснить, как он действует, рассмотрим его действие на смещения одноатомной цепочки с периодическим условием (группа $\mathbb{C}_N$)

$$\hat{T}_{nL}\, u(x_r) = u(x_r - nL), \qquad \hat{T}_{NL}\, u(x_r) = u(x_r - NL) = u(x_r),$$

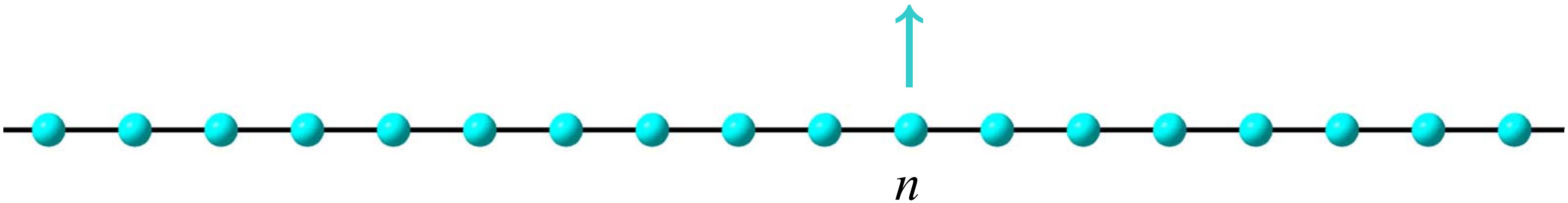
$$\Gamma_m \quad \mapsto \quad \chi_m(n) = \exp\left(-\frac{2\pi i\, mn}{N}\right)$$

$$\hat{P}_m u(x_r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \chi_m^*(n)\, \hat{T}_{nL}\, u(x_r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i\, mn}{N}\right) u(x_r - nL)$$

Возьмем смещение вида: $u(x_r) = 1, \quad r = 0; \quad u(x_r) = 0, \quad r \neq 0$



Очевидно, $u(x_r - nL) = 1, \quad r = n; \quad u(x_r) = 0, \quad r \neq n$

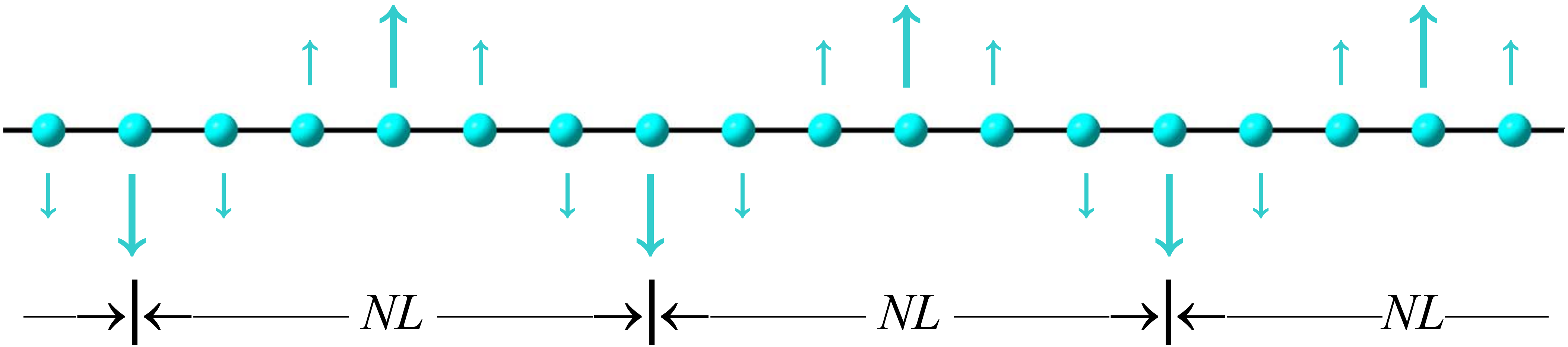


Тогда действие проектора переведет это смещение в смещение вида:

$$\hat{P}_m u(x_r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \chi_m^*(n)\,\hat{T}_{nL}\,u(x_r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i\, mn}{N}\right) u(x_r - nL) =$$

$$= \frac{1}{N}\exp\left(\frac{2\pi i\, mn}{N}\right), \quad r = n$$

Вещественную часть такого смещения можно изобразить как:



Т.е., с точностью до общего множителя, мы получили нормальное колебание вида: $\xi_k(x_r) = A\exp(ikx_r), \quad k = k_m = \dfrac{2\pi m}{NL}.$

В случае двух- и более атомной цепочки это даст нам только симметризованные смещения, еще не окончательные формы нормальных колебаний.